KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Matematika Umum

KELAS XI

LIMIT FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA WAJIB KELAS XI

PENYUSUN
Istiqomah, S.Pd

SMA Negeri 5 Mataram

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Limit	:	nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri suatu titik maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.
Limit Kiri	:	Pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kiri
Limit Kanan	:	Pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kanan
Metode Substitusi	:	menentukan nilai limit dengan mensubstitusi langsung batas limit ke dalam limit fungsi untuk limit tidak bentuk tak tentu.
Metode pemfaktoran	:	menentukan limit bentuk tidak tentu dengan memfaktorkan pembilang dan atau penyebut agar dapat dilakukan metode substitusi.
Metode Perkalian dengan Sekawan	:	menentukan nilai limit bentuk akar dengan mengalikan sekawan agar dapat dilakukan metode pemfaktoran.

PETA KONSEP

Limit Fungsi
Pengertian Limit Fungsi
Sifat-sifat Limit Fungsi
Limit Fungsi Aljabar
Penyelesaian dengan ara Substitusi
Penyelesaian dengan cara Pemfaktoran
Penyelesaian dengan cara Mengalikan dengan akar sekawan
Penerapan Limit Fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Wajib
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 8x45 Menit
Judul Modul	: Limit Fungsi Aljabar

B. Kompetensi Dasar

3.7 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, serta menentukan eksistensinya.
4.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.

C. Deskripsi Singkat Materi

Anak-anak, Limit adalah salah satu bab yang terdapat di pelajaran matematika yang sering sekali dianggap rumit. Padahal pemahaman tentang limit diperlukan untuk lebih memahami deret geometri tak hingga, materi differensial, integral dan penerapan pada bidang ilmu yang lain. Oleh karena itu pada modul ini akan disajikan materi limit dengan cara yang sederhana, agar kalian dapat mengubah persepsinya bahwa mempelajari limit tidaklah sulit, selain itu pada modul ini akan dipelajari tentang limit fungsi aljabar yang meliputi limit fungsi secara intuitif, limit nilai tertentu dan limit nilai tak tentu. Materi limit ini sangat menarik karena dengan belajar limit kita akan mengetahui manfaat konsep limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Anak-anakku sekalian, modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh soal yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada modul ini.
5. Jika kalian menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pengertian limit secara intuitif dan sifat-sifat limit fungsi
Kedua : Limit Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Pengertian dan sifat-sifat Limit Fungsi

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak, setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat memahami tentang ...

1. Pengertian Limit Fungsi
2. Sifat – Sifat Limit Fungsi

B. Uraian Materi

Pengertian Limit Fungsi

Anak-anak, pernahkah kalian mencoba menghitung kecepatan dan percepatan yang dialami sebuah mobil yang bergerak selama t sekon? Jika persamaan gerak mobil tersebut memenuhi persamaan $s(t) = (t^2 + 4t)$ meter, maka berapakah kecepatan dan percepatan mobil tersebut tepat pada saat $t = 3$ sekon?. Permasalahan di atas merupakan permasalahan pada bidang Fisika yang pemecahannya menggunakan bantuan konsep limit fungsi.

Gambar 1. Mobil melaju dengan cepat
Sumber : https://images.app.goo.gl/YuzUW8udBUF4fZGD7

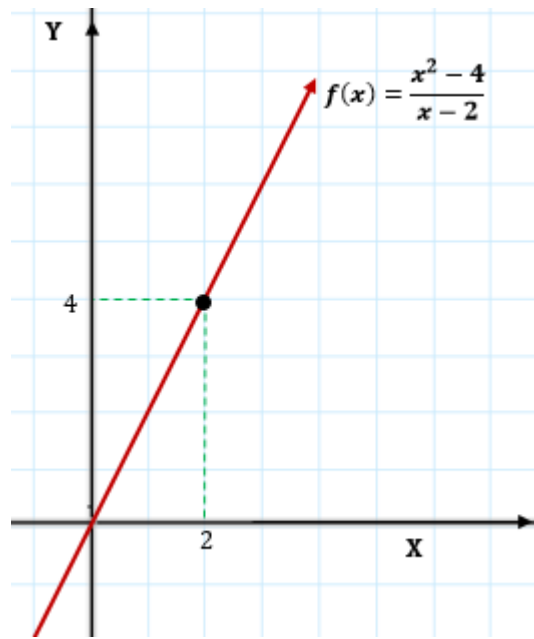
Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

Untuk lebih jelasnya perhatikan ilustrasi berikut :
Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Tentukan nilai $\lim_{x \to a} f(x)$ jika ada !
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 2 dari kiri					↓	x mendekati 2 dari kanan				
x	1,8	1,9	1,99	1,9999	2	2,000001	2,0001	2,001	2,05	2,1
$f(x)$	3,8	3,9	3,99	3,9999	...	4,000001	4,0001	4,001	4,05	4,1
$f(x)$ mendekati 4					↑	$f(x)$ mendekati 4				

Jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kiri maka nilainya akan mendekati 4, sedangkan jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kanan maka nilainya akan mendekati 4 juga. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \text{ dan } \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \text{ jadi } \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Jika disajikan dalam grafik seperti berikut

Gambar 2: Fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
Sumber: koleksi pribadi

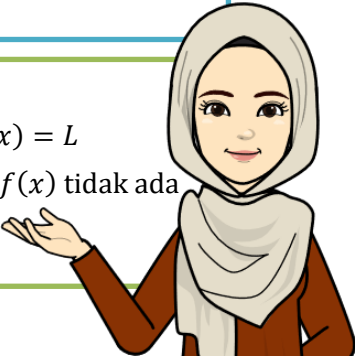
Jadi, nilai $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ adalah 4

Secara matematis limit dapat didefinisikan sebagai berikut.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

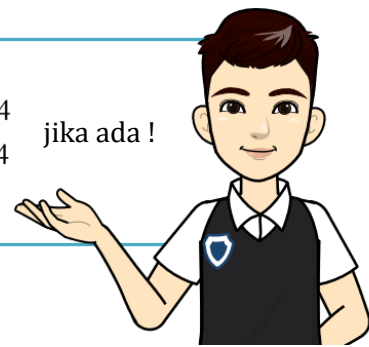
a. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

b. Jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada

Keterangan :

- $\lim_{x \to a^+} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kanan $(x > a)$
- $\lim_{x \to a^-} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kiri $(x < a)$

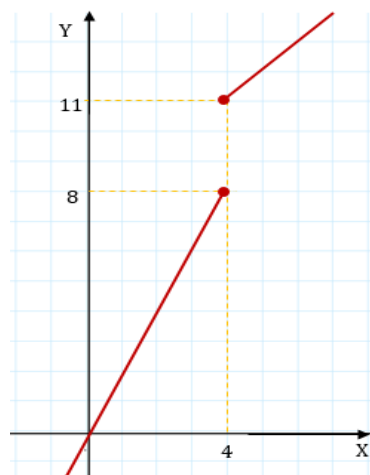
Biar makin paham simak contoh berikut ya…

Contoh Soal 1:

Tentukan limit f(x) untuk fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{, untuk } x \leq 4 \\ 2x+3, & \text{untuk } x > 4 \end{cases}$ jika ada !

Pembahasan :
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 4 dari kiri					↓	x mendekati 4 dari kanan				
x	3,9	3,95	3,99	3,9999	4	4,00001	4,0001	4,001	4,01	4,1
$f(x)$	7,80	7,90	7,98	7,9998	…	11,00002	11,0002	11,002	11,02	11,2
$f(x)$ mendekati 8					↑	$f(x)$ mendekati 11				

Tabel di atas menunjukkan : $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$ dan $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 11$
(limit kiri ≠ limit kanan), sehingga $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ tidak ada.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.

Gambar 3: Grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{, untuk } x \leq 4 \\ 2x+3, & \text{untuk } x > 4 \end{cases}$

Sumber: koleksi pribadi

Catatan :

Secara konsep dasar matematika, cara mengerjakan soal matematika yang ada limitnya, hanya tinggal mengganti/mensubtitusi variabel x menjadi angka yang didekati oleh x tersebut.

Contoh Soal 2:

Anak – anak, coba perhatikan limit fungsi di bawah ini

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6}$$

Berapakah hasil nilai limit dari data diatas ?
$A.$ 3
$B.$ 0
$C.$ 7
$D.$ 6
$E.$ ∞

Pembahasan:
Pada limit diatas, untuk mencari hasil nilai limitnya, kalian hanya tinggal mensubtitusi atau mengganti variabel x dengan angka 1, sehingga hasil limitnya menjadi

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6} = \frac{5.1^3+7.1^{14}+6}{8.1^5+4.1^9-6}$$
$$= \frac{18}{6}$$
$$= 3$$

Jadi, nilai limit tersebut adalah **3** (**Jawaban: A)**

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan f(x) dan g(x) adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati a, dengan k dan a adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka sifat-sifat limit fungsi antara lain:

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$

   Contoh:
   $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   Contoh:
   $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$

3. $\lim\limits_{x\to a} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$

   Contoh:
   $$\lim_{x\to 2} 3x^2 = 3\left[\lim_{x\to 2} x^2\right]$$
   $$= 3.(2)^2$$
   $$= 3.4$$
   $$= 12$$

4. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x) = \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x$$
$$= 3^2 + 2.\lim_{x\to 3} x$$
$$= 9 + 2.3$$
$$= 9 + 6$$
$$= 15$$

5. $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\lim_{x\to 2}(x^2.x) = \lim_{x\to 2} x^2.\lim_{x\to 2} x$$
$$= (-2)^2.(-2)$$
$$= 4.(-2)$$
$$= -8$$

6. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $dengan$ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Contoh:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2 + 3}{x + 1}\right] = \frac{\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 3}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}$$
$$= \frac{1^2 + 3}{1 + 1}$$
$$= \frac{1 + 3}{2}$$
$$= \frac{4}{2}$$
$$= 2$$

7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Contoh:

$$\lim_{x\to 1}[3x^2 - 1]^5 = \left[\lim_{x\to 1}(3x^2 - 1)^5\right]$$
$$= [3(1)^2 - 1]^5$$
$$= [3 - 1]^5$$
$$= [2]^5$$
$$= 32$$

8. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}\ dengan\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2\ dan\ \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in R$

Contoh :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x^2 + 2} &= \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} (x^2 + 2)} \\
&= \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} x^2 + \lim_{x \to 5} 2} \\
&= \sqrt[3]{5^2 + 2} \\
&= \sqrt[3]{25 + 2} \\
&= \sqrt[3]{27} \\
&= \sqrt[3]{3^3} \\
&= 3^{\frac{3}{3}} \\
&= 3^1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Itulah sifat-sifat atau teorema limit beserta contoh soal dan penyelesaiannya, semoga kalian paham ya dengan apa yang sudah dijelaskan di atas.

Untuk lebih jelasnya penggunaan sifat di atas perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal 1:

Anak-anak, coba perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 16
B. 7
C. 5
D. $2\sqrt{2}$
E. $\sqrt{3}$

Pembahasan:

Anak – anak, pada soal diatas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 4 ya, sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2 &= \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3\,x^2 \\
&= 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2)^2 \\
&= 4 + 3 \cdot 4 \\
&= 4 + 12 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 16 **(Jawaban: A)**

Contoh Soal 2 :

Anak-anak, sekali lagi perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 4
B. 8
C. 27
D. 64
E. 81

Pembahasan:
pada soal di atas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 7 ya, sehingga

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 = \left(\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)\right)^3$$
$$= ((-3)^2 - 5)^3$$
$$= (9 - 5)^3$$
$$= (4)^3$$
$$= 64$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 64 (**Jawaban: D)**

C. Rangkuman

1. Pengertian Limit Fungsi

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

a. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

b. Jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada

2. **Sifat-sifat Limit Fungsi Aljabar**
   1. $\lim\limits_{x \to a} k = k$
   2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
   3. $\lim\limits_{x \to a} [kf(x)] = k \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]$
   4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
   5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x).\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$
   6. $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\ dengan \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
   7. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$
   8. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}\ dengan\ f(x) > 0\ dan\ n\ genap$

3. Secara konsep dasar matematika, cara mengerjakan soal limit, hanya tinggal mengganti/mensubstitusi variabel $\boldsymbol{x}$ menjadi angka yang didekati oleh x tersebut.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap pengertian dan sifat-sifat limit fungsi aljabar kerjakan soal latihan berikut:

Soal Pilihan Ganda

1. Perhatikan tabel nilai $f(x)$ berikut.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999

Nilai $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \cdots$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

2. Diketahui tabel nilai fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 4 sebagai berikut

x	$f(x)$
2	1
3	2
3,1	2,1
3,9	2,9
3,99	2,99
3,999	2,999
…	…
4	…
…	…
4,001	3,001
4,01	3,01
4,1	3,1
5	4

Nilai $\lim_{x \to 4} f(x) = \cdots$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. tidak ada

3. Diketahui tabel nilai fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 4 sebagai berikut

x	$g(x)$
-2	-2
-1,5	-1,5
-1,1	-1,1
-1,01	-1,01
-1,001	-1,001
-1,0001	-1,0001
…	…
-1	…
…	…
-0,999	1
-0,99	1
-0,9	1
0	1

Nilai $\lim_{x \to -1} g(x) = \cdots$

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2 E. tidak ada

4. Nilai $\lim_{x \to 5} (-3) = \cdots$

A. -5 B. -3 C. -2 D. 2 E. 3

5. Nilai $\lim_{x \to -2} (x - 4) = \cdots$

A. -8 B. -6 C. -4 D. 0 E. 2

6. Nilai $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x-1} = \cdots$

A. -8 B. -6 C. -4 D. 0 E. 2

7. Diketahui fungsi $f(x)$ sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{untuk } x < -2 \\ -2x - 1, \text{untuk } x > 2 \end{cases}$$

Nilai $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \cdots$

A. -3 B. -1 C. 0 D. 3 E. tidak ada

8. Diketahui $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \cdots$

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{2}$ E. 5

9. Jika $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ dan $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 9$, nilai $\lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$

A. 4,1 B. 3,1 C. 1,4 D. 1,3 E. 1,0

10. Diketahui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$, nilai $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + 1)^2 - 3f(x)$ adalah ...

A. $p^2 + 5p + 1$
B. $p^2 - p + 3$
C. $p^2 - p + 1$
D. $p^2 + p + 1$
E. $p^2 + p + 1$

Pembahasan :

1. Dari tabel terlihat untuk nilai-nilai x yang mendekati 2 dari kiri terlihat, nilai fungsi $f(x)$ semakin mendekati 4
   Jadi, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$
   Jawaban : D

2. Dari tabel terlihat fungsi $f(x)$ mendekati nilai 3 untuk nilai-nilai x mendekati 4 baik dari kiri $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$ dan dari kanan $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 3$. Oleh karena $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 3$ maka $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$
   Jawaban : B

3. Dari tabel terlihat bahwa untuk nilai-nilai x mendekati -1 dari kiri, nilai fungsi $g(x)$ mendekati nilai -1. Artinya $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -1$. Untuk nilai-nilai x mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $g(x)$ mendekati nilai -1. Artinya $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 1$. Karena $\lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$ maka nilai $\lim_{x\to 1} g(x)$ tidak ada.
   Jawaban : E

4. $\lim_{x\to 5}(-3) = -3$ karena berdasarkan sifat limit $\lim_{x\to a} k = k$
   Jawaban : B

5. Untuk menentukan $\lim_{x\to -2}(x-4)$ subtitusi nilai $x = -2$ ke $x - 4$ seperti berikut
   $\lim_{x\to -2}(x-4) = -2 - 4$
   $= -6$
   Jawaban : B

6. Untuk menentukan nilai $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1}$ bisa dengan mensubtitusi nilai $x = -1$ sehingga diperoleh sebagai berikut
   $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(-1)^2-1}{-1-1}$$
   $$= \frac{1-1}{-2}$$
   $$= \frac{0}{-2}$$
   $$= 0$$
   Jadi, nilai $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1}$ adalah 0
   Jawaban : D

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{untuk } x < -2 \\ -2x - 1, \text{untuk } x > 2 \end{cases}$
   Nilai $\lim_{x\to -2} f(x)$ dapat kita cari dari pendekatan untuk nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan

   Pendekata dari kiri
   $$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} x^2 - 1$$
   $$= (-2)^2 - 1$$
   $$= 4 - 1$$
   $$= 3$$
   Pendekatan dari kanan
   $$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} -2x - 1$$

$= -2(-2) - 1$
$= 4 - 1$
$= 3$

Karena $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$, maka $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

Jadi, nilai $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

Jawaban : D

8. Untuk mencari nilai $\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1}$ dengan substitusi langsung seperti berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1} = \frac{2(1)-5}{1+1}$$
$$= \frac{2-5}{2}$$
$$= -\frac{3}{2}$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1}$ adalah $-\frac{3}{2}$

Jawaban : B

9. Diketahui :

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 3} g(x) = 9,$

Diketahui : $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$

Untuk menentukan nilai $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)}$ bisa menerapkan sifat-sifat limkt fungsi seperti berikut.

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \frac{\lim_{x \to -3} f(x)+g(x)}{\lim_{x \to -3} 2f(x)}$$ Gunakan sifat 6

$$= \frac{\lim_{x \to -3} f(x) + \lim_{x \to -3} g(x)}{\lim_{x \to -3} 2 \times \lim_{x \to -3} f(x)}$$ Gunakan sifat 4 untuk pembilang dan sifat 3 untuk penyebut

$$= \frac{5+9}{2 \times 5}$$
$$= \frac{14}{10}$$
Substitusi nilai $f(x)$ dan $g(x)$

$$= 1{,}4$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)}$ adalah 1,4

Jawaban : C

10. Diketahui $\lim_{x \to a} f(x) = p$

Untuk menentukan nilai $\lim_{x \to a}(f(x)+1)^2 - 3f(x)$, kita gunakan sifat-sifat limit seperti berikut

$\lim_{x \to a}(f(x)+1)^2 - 3f(x)$

$= \lim_{x \to a}(f(x))^2 + 2f(x) + 1) - 3f(x)\} \rightarrow$ Jabarkan bentuk $(f(x)+1)^2$

$= \lim_{x \to a}\{(f(x)^2 - f(x) + 1)$

$= \lim_{x \to a} f(x)^2 - \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} 1 \rightarrow$ Gunakan sifat 6

$= p^2 - p + 1$

Jadi, nilai $\lim_{x \to a} (f(x) + 1)^2 - 3f(x)$ adalah $p^2 - p + 1$

Jawaban : C

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian limit fungsi?		
2.	Apakah kalian memahami sifat-sifat limit fungsi Aljabar?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan limit fungsi Aljabar dengan menggunakan sifat-sifat limit fungsi Aljabar?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat:

1. Memahami limit fungsi aljabar
2. Menentukan nilai limit fungsi aljabar
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar

B. Uraian Materi

Anak – anak, jika kalian menemukan sebuah limit fungsi $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ dan disubtitusikan $x = 2$, maka hasilnya adalah $\frac{0}{0}$. Dalam limit, ini tidak boleh dan harus diubah.

Bagaimana cara merubahnya ya?

Secara konsep matematika, cara merubah bentuk limit yang hasilnya $\frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), kita menggunakan dua cara, yakni cara **memfaktorkan** dan **merasionalkan (mengalikan dengan akar sekawan)**. Mau tau caranya? Simak pembahasan selanjutnya ya...

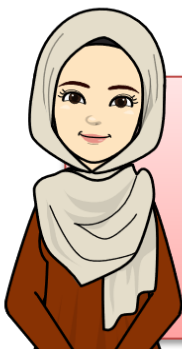
Nah berikutnya kita akan membahas metode penyelesaian limit bentuk tak tentu dengan pemfaktoran dan mengalikan dengan akar sekawan.

Sebelum membahas contoh soal dengan pemfaktoran kalian harus tahu dulu bentuk hasil limit. Bentuk hasil limit dibedakan menjadi dua yaitu **bentuk tentu** dan **bentuk tak tentu.**

Hasil limit Bentuk Tentu:

$\left(a, \frac{a}{b}, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{b} = 0\right)$ dengan $a, b \in R$

Hasil limit Bentuk Tentu:

$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^{\infty}\right)$ dengan $a, b \in R$

Catatan

Dengan menggunakan metode substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka bentuk tentu itulah hasil limitnya. Tapi jika hasilnya merupakan bentuk tak tentu, maka harus diselesaikan dengan menggunakan metode faktorisasi atau mengalikan dengan akar sekawan.

Agar kalian paham dengan hasil bentuk tentu dan tak tentu, perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh Soal 1 :

Tentukan hasil limit berikut!

1. $\lim\limits_{x \to 1} 5x^3$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4-4x}{3x}$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Pembahasan:

1. $\lim\limits_{x \to 1} 5x^3$
   $= 5.(1)^3$
   $= 5.1$
   $= 5$ (bentuk tentu)

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
   $= \frac{4-3(-1)}{-2(-1)}$
   $= \frac{4+3}{3}$
   $= \frac{7}{3}$ (bentuk tentu)

3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
   $= \frac{2(3)-3}{3-3}$
   $= \frac{6-3}{0}$
   $= \frac{3}{0}$
   $= \infty$ (bentuk tentu)

   Khusus dalam limit, ketika hasil limitnya berbentuk $\frac{a}{0}$ maka nilainya sama dengan ∞, hal ini dikarenakan bentuk grafik fungsi $f(x) = \frac{a}{x}$ untuk x mendekati 0 nilainya mendekati ∞

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4-4x}{3x}$
   $= \frac{4-4(1)}{3(1)} = \frac{4-4}{3}$
   $= \frac{0}{3} = 0$ (bentuk tentu)

5. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$= \frac{2^2 - 4}{2 - 2}$

$= \frac{4 - 4}{2 - 2}$

$= \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu)

Dengan substitusi hasilnya tidak ada bilangan yang memenuhi, sehingga harus diselesaikan dengan menggunakan metode lain.

Nah pada contoh nomor 5 ini merupakan contoh soal limit yang bisa diselesaikan dengan metode pemfaktoran.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Pemfaktoran**

Contoh Soal 1:

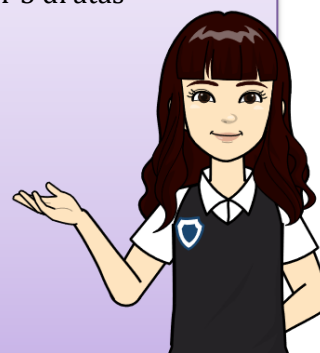
Anak-anak sekarang kita coba menyelesaikan soal nomor 5 di atas dengan cara memfaktorkan

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$= \lim_{x \to 2} x + 2$

$= 2 + 2$

$= 4$

Contoh Soal 2:

$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \ldots$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(-2)^3 + 8}{-2 + 2} = \frac{0}{0} (tak\ tentu)$

Dengan memfaktorkan :

$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)}$

$= \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4)$

$= (-2)^2 - (-2) + 4$

$= 4 + 4 + 4$

$= 12$

Penting untuk diingat....!

Beberapa bentuk *faktor istimewa* :

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Contoh Soal 3:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5} = \cdots$$

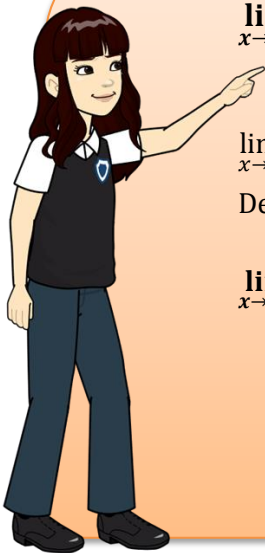
Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5} = \frac{2(-1)^2 - (-1) - 3}{3(1)^2 - 8(-1) +)5} = \frac{2 + 1 - 3}{3 - 8 + 5} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan :

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 + 8x + 5} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x - 3)(x + 1)}{(3x + 5)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x - 3}{3x + 5}$$

$$= \frac{2(-1) - 3}{3(-1) + 5} = \frac{-5}{2}$$

Contoh Soal 4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x}{x^2 + 2x} = \cdots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x + 6}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(0^3 - 3.0 + 6.0)}{(0^2 + 2.0)} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan diperoleh:

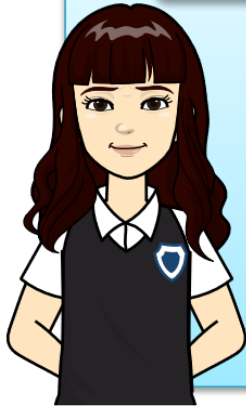
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 3x + 6)}{x(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - 3x + 6)}{(x + 2)} = \frac{(0^2 - 3.0 + 6)}{(0 + 2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Inilah contoh soal limit yang diselesaikan dengan cara pemfaktoran, baiklah selanjutnya kita akan belajar cara menyelesaikan limit dengan cara mengalikan dengan akar sekawan.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Mengalikan dengan Akar Sekawan**

Anak-anak ada suatu kondisi dimana suatu limit tidak bisa diselesaikan dengan cara substitusi ataupun dengan cara pemfaktoran, yaitu salah satunya adalah limit fungsi yang berbentuk akar.

Contoh Soal 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu), dengan metode pemfaktoranpun sangat sulit diselesaikan, jadi solusinya penyelesaian limit bentuk akar ini adalah diselesaikan dengan merasionalkan/mengalikan dengan akar sekawan. Baiklah langsung kita jawab ya…

Sebelum kita membahas contoh soal di atas, kita ingat kembali bentuk-bentuk sekawan dari bentuk akar.

Ingat..!

Bentuk Sekawan dari :

$x - a$	bentuk kawan dari	$x + a$
$\sqrt{x} - a$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x} + a$
$\sqrt{x} - \sqrt{a}$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x} + \sqrt{a}$
$\sqrt{x+a} - b$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x+a} + b$

Pembahasan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \times 1$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Kalikan dengan akar sekawan dari $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(1+x) - (1-x)}$$

perubahan penyebut dari bentuk rumus $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}$$ Substitusi nilai x=0

$$= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Contoh Soal 2:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \cdots$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu). Jadi untuk menyelesaikan limit ini kita selesaikan dengan akar sekawan. Langsung saja kita bahas ya…

Pembahasan:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times 1$$

$$= \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$ Kalikan dengan akar sekawan

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3+x)-(2x)}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+3}+\sqrt{2.3}}$$ Substitusi nilai x=3

$$= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$ Rasionalkan penyebut, kalikan pembilang dan dengan $\sqrt{6}$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

Catatan:

Anak-anak ingat ya… tidak semua limit bentuk akar diselesaikan dengan mengalikan akar sekawan, sebelum menyelesaikan limit harus dicoba dulu dengan menggunakan substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah hasilnya, tapi jika bentuknya tak tentu maka baru diselesaikan dengan cara lain.

Aplikasi Limit Fungsi

Seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, bahwa limit fungsi dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti beberapa contoh berikut. Untuk lebih memahami aplikasi limit fungsi tersebut perhatikan baik-baik contoh berikut.

Contoh Soal 1:

Sebuah lempengan logam yang dipanaskan akan memuai dengan pertambahan luas sebagai fungsi waktu f(t)=0,36t2 +0,6t (cm2). Kecepatan perubahan luas perubahan luas lempengan logam tersebut pada saat t menit dirumuskan dengan $v = \lim_{t\to t_1} \frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}$.
Tentukan kecepatan perubahan luas lempengan logam pada saat t=5 menit

Pembahasan :

$$f(t) = 0{,}36t^2 + 0{,}6t$$
$$\begin{aligned} f(5) &= 0{,}36(5)^2 + 0{,}6(5) \\ &= 0{,}36\,(25) + 3 \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Kecepatan perubahan pertambangan luas lempengan logam pada saat t=5 menit

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t\to t_1} \frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1} \\ &= \lim_{t\to 5} \frac{f(t)-f(5)}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}36t^2 + 0{,}6t - 12}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t^2 + t - 20)}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t + 4)(t-5)}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5} 0{,}6.\,(0{,}6t + 4) \\ &= 0{,}6.\,(0{,}6 \times 5 + 4) \\ &= 0{,}6(3 + 4) \\ &= 4{,}2 \end{aligned}$$

Jadi kecepatan perubahan luas lempengan logam adalah 4,2 cm2/menit

Contoh Soal 2 :

Sebuah mobil yang bergerak dengan kelajuan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = 5t - \frac{1}{2}t^2$, v dalam m/detik dan t dalam detik.

a. Tentukan nilai pendekatan kelajuan untuk t mendekati 5 detik.
b. Tentukan percepatan (dalam m/detik) pada saat t mendekati 3 detik

Percepatan $= \frac{\text{Perubahan kelajuan}}{\text{Perubahan waktu}} = \frac{\triangle v}{\triangle t}$ (m/det²)

Pembahasan:

a. Nilai pendekatan v(t) untuk t mendekati 5 detik

$$\lim_{t\to 5} v(t) = \lim_{t\to 5}\left(5t - \frac{1}{2}t^2\right)$$
$$= 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5^2$$
$$= 25 - 12{,}5$$
$$= 12{,}5$$

b. Percepatan=$\frac{Perubahan\ kelajuan}{Perubahan\ waktu}$

Untuk waktu mendekati 3 detik

$$\lim_{t\to 3} \frac{\triangle v}{\triangle t} = \lim_{t\to 3} \frac{v(t) - v(3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{5t - \frac{1}{2}t^2 - 10{,}5}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(10t - t^2 - 21)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 10t - 21)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 7)(t-3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{1}{2}(-t+7)$$
$$= \frac{1}{2}(-3+7)$$
$$= 2$$

C. Rangkuman

1. Untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar Langkah pertama adalah substitusi langsung, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah nilai limitnya, jika substitusi langsung hasilnya bentuk tak tentu maka harus diselesaikan dengan cara lain yaitu **metode pemfaktoran** atau **mengalikan dengan akar sekawan**.

2. Bentuk hasil limit dibedakan menjadi dua yaitu bentuk tentu dan bentuk tak tentu.

Hasil limit Bentuk Tentu:
$\left(a, \frac{a}{b}, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{b} = 0\right)$ dengan $a, b \in R$

Hasil limit Bentuk Tentu:
$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^{\infty}\right)$ dengan $a, b \in R$

3. Tidak semua limit bentuk akar diselesaikan dengan mengalikan akar sekawan, sebelum menyelesaikan limit harus dicoba dulu dengan menggunakan substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah hasilnya, tapi jika bentuknya tak tentu maka baru diselesaikan dengan cara lain.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman kalian terhadap penyelesaikan limit fungsi aljabar kerjakan soal latihan berikut ya...

Tentukan nilai limit dari:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x+2} = \cdots$
   A. 0
   B. 1
   C. 3
   D. 9
   E. ∞

2. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$
   A. $\frac{5}{7}$
   B. $\frac{6}{7}$
   C. $\frac{8}{7}$
   D. $\frac{9}{7}$
   E. $\frac{10}{7}$

3. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{4}$
D. 0
E. 1

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$
A. 0
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$
D. $\frac{7}{2}$
E. $\frac{9}{2}$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$
A. 0
B. $-\frac{1}{4}$
C. $-\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

6. $\lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)}{3-\sqrt{x^2+5}}$
A. - 6
B. 1
C. 3
D. 6
E. 9

7. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = t^2 - t$ (v dalam meter, t dalam detik). Jika t mendekati 5 detik, kecepatan mobil mendekati….
A. 10 m/detik
B. 12 m/detik
C. 15 m/detik
D. 20 m/detik
E. 25 m/detik

8. Angka pertumbuhan penduduk setiap tahun dirumuskan dengan $p(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - 3t + 5\%}$. Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahunkelima (t=5) adalah….
A. 0,75%
B. $\sqrt{15}$ %
C. $\sqrt{2}$ %
D. $\sqrt{2,5}$ %
E. $\sqrt{2,75}$ %

9. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak tempuh setiap saat dirumuskan $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ (S dalam meter dan t dalam detik). Jarak yang ditempuh mobil saat t mendekati 60 detik adalah…
   A. 1.980 meter
   B. 2.000 meter
   C. 2.160 meter
   D. 2.700 meter
   E. 2.980 meter

10. Kecepatan benda setiap saat ditentukan dengan rumus $v(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}4t$. Perubahan kecepatan untuk t mendekati 5 dirumuskan dengan $\lim_{t \to 5} \frac{v(t)-v(s)}{t-5}$. Nilai perubahan kecepatan benda tersebut adalah…
   A. 1,2 m/det2
   B. 1,6 m/det2
   C. 1,8 m/det2
   D. 2,0 m/det2
   E. 2,4 m/det2

Pembahasan:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x+2} = \cdots$

   Dengan substitusi langsung

   $$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{x+2} = \frac{2 \times 0}{0+2}$$
   $$= \frac{0}{2}$$
   $$= 0$$

   Jawaban : C

2. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$

   $= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+3)}$ — Faktorakan pembilang dan penyebut

   $= \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)}{(x+3)}$

   $= \frac{4+4}{4+3} = \frac{8}{7}$

   Jawaban : C

3. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$

   $= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-1)}$ — Faktorakan pembilang dan penyebut

   $= \lim_{x \to 3} \frac{x-4}{x-1}$

   $= \frac{3-4}{3-1}$

   $= \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

   Jawaban : B

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

   $= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2-3x-9)}{(x-3)(x+3)}$ — Faktorkan pembilang dan penyebut

   $= \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3}$

   $= \frac{3^2+3.3+9}{3+3}$ — Substitusi nilai $x = 3$

   $= \frac{27}{6}$

   $= \frac{9}{2}$

Jawaban : E

5. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})-(\sqrt{2x-1})}{(x-1)} \times \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

Kalikan dengan akar sekawan

$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2x-1})^2}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x-(2x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x-2x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$= \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{2(1)-1}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{2-1}}$

Substitusi nilai $x = 1$

$= \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$

$= \frac{-1}{1+1}$

$= \frac{-1}{2}$

$= -\frac{1}{2}$

Jawaban : C

6. $\lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(4-x^2)}{3-\sqrt{x^2+5}} \times \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} \right)$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3)^2-(\sqrt{x^2+5})^2} \right)$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} \right)$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5} \right)$

perubahan penyebut dari bentuk rumus $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{4 - x^2} \right)$

$= \lim_{x \to 2} \left(3 + \sqrt{x^2 + 5} \right)$

$= 3 + \sqrt{2^2 + 5}$

$= 3 + \sqrt{4 + 5}$

$= 3 + \sqrt{9}$

$= 3 + 3$

$= 6$

Substitusi nilai $x = 2$

Jawaban : D

7. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = t^2 - t$ (v dalam meter, t dalam detik). Jika t mendekati 5 detik, kecepatan mobil mendekati....

Pembahasan:
DiketahuI : $v(t) = t^2 - 2t$
t mendekati 5 detik
maka kecepatan mobil mobil pada saat t mendekati 5 detik adalah :

$\lim_{t \to 5} v(t) = \lim_{t \to 5} (t^2 - t)$

$= 5^2 - 2 \times 5$

$= 25 - 10$

$= 15$

Jawaban : C

8. Angka pertumbuhan penduduk setiap tahun dirumuskan dengan $p(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - 3t + 5\%}$. Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahunkelima (t=5) adalah....

Pembahasan :
Rumus pertumbuhan penduduk setiap tahun :

$p(t) = \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5}$

Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahun kelima (t=5)

$\lim_{t \to 5} p(t) = \lim_{t \to 5} \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5) + 5}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \times 25 - 15 + 5}$

$= \sqrt{12{,}5 - 15 + 5}$

$= \sqrt{2{,}5}$

Jadi pertumbuhan penduduk setiap tahun $\sqrt{2{,}5}$ %

Jawaban : D

9. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak tempuh setiap saat dirumuskan $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ (S dalam meter dan t dalam detik). Jarak yang ditempuh mobil saat t mendekati 60 detik adalah…

Pembahasan :

$$(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$$

Saat t mendekati 60 detik jarak yang ditempuh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S(t) &= \lim_{t \to 60} \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 60^2 + 3 \times 60 \\ &= \frac{1}{2} \times 3.600 + 180 \\ &= 1800 + 180 \\ &= 1.980 \end{aligned}$$

Jadi jarak yang ditempuhmendekati 1.980 meter

Jawaban : A

10. Kecepatan benda setiap saat ditentukan dengan rumus $v(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}4t$. Perubahan kecepatan untuk t mendekati 5 dirumuskan dengan $\lim_{t \to 5} \frac{v(t)-v(s)}{t-5}$. Nilai perubahan kecepatan benda tersebut adalah…

Pembahasan:

$$v(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}4t$$
$$v(5) = 0{,}2 \times 5^2 - 0{,}4 \times 5$$
$$v(5) = 5 - 2$$
$$v(5) = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 5} \frac{v(t) - v(5)}{t - 5} &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}2t^2 - 0{,}4t - 3}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}2(t^2 - 2t - 15)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}2(t - 5)(t + 3)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} 0{,}2 \times (t + 3) \\ &= 0{,}2 \times (5 + 3) \\ &= 1{,}6 \end{aligned}$$

Jadi **perubahan** kecepatan benda tersebut adalah 1,6 m/det^3

Jawaban **: B**

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami langkah-langkah menyelesaikan limit fungsi aljabar?		
2	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara substitusi?		
3.	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara pemfaktoran?		
4.	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara merasionalkan atau mengalikan dengan akar sekawan?		
5.	Apakah kalian memahami dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan penerapan limit fungsi aljabar		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Diketahui table nilai fungsi f(x) untuk x mendekati 7 sebagai berikut.

x	f(x)
5	1,583333
6	1,54
6,1	1,534351
6,9	1,5041,5
6,99	1,5
6,999	1,50004
....	....
7	?
....	...
7,001	2,999929
7,01	2,99929
7,1	2,99
8	2,93

Nilai $\lim_{x \to 7^+} f(x) = \ldots.$

A. $\frac{3}{2}$
B. 2
C. $\frac{2}{3}$
D. 3
E. 7

2. Perhatikan table nilai berikut.

x	f(x)
-5	-8
-4	-3,5
-3,1	-2,1
-3,01	-2,01
-3,001	-2,001
....	....
-3	?
....	...
-2,999	-1,999
-2,99	-1,99
-2,9	-1,9
-2	-1,3

Nilai $\lim_{x \to -3} f(x) = \ldots.$

A. -8
B. -2
C. 0
D. 2
E. 8

3. Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, untuk\ x<-2 \\ -2x-1, untuk\ x>-2 \end{cases}$$

Nilai $\lim_{x\to -2} f(x) = \cdots$

A. –3
B. –1
C. 0
D. 3
E. Tidak ada

4. Jika $\lim_{x\to 3} f(x) = 5\ dan \lim_{x\to 3} g(x) = 9, maka\ nilai \lim_{x\to 3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$
A. 4,1
B. 3,1
C. 1,4
D. 1,3
E. 1,0

5. $\lim_{y\to 2} \left(\frac{4y^3+8y}{y+4}\right)^{\frac{1}{3}} = \cdots$
A. 1
B. $\sqrt[3]{2}$
C. $\sqrt[3]{4}$
D. 2
E. 4

6. $\lim_{x\to -5} (2x^4+3x^3-25) = \cdots$
A. 1.650
B. 1.600
C. 1.400
D. 875
E. 850

7. $\lim_{x\to 2} \frac{(x^{10}-1)}{1-x^2} =\ldots$
A. –341
B. –256
C. 256
D. 341
E. 1.023

8. Nilai $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2-8}{x+2} = \ldots$
A. –8
B. –4
C. –2
D. 4
E. 8

9. Nilai $\lim_{x \to -2} \frac{8x^2 + 14x - 4}{2x + 4} = \ldots$
   A. –9
   B. –7
   C. 0
   D. 7
   E. 10

10. Nilai $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1}$
   A. 3
   B. $\frac{5}{2}$
   C. 2
   D. 1
   E. –1

11. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = \ldots.$
   A. $\frac{1}{5}$
   B. $\frac{1}{7}$
   C. 0
   D. $-\frac{1}{7}$
   E. $-\frac{2}{5}$

12. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x}{2x^2 - 9x + 9} = \ldots.$
   A. –2
   B. $-\frac{2}{3}$
   C. $-\frac{2}{9}$
   D. $\frac{2}{3}$
   E. 2

13. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \ldots$
   A. –6
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. 0
   D. . $\frac{3}{2}$
   E. 6

14. Nilai $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 14x + 8}{x^2 - 3x - 4}$ = …
    A. 4
    B. 2
    C. $\frac{1}{2}$
    D. – 2
    E. – 4
15. Nilai $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x^2 + 2x - 3}$ = …
    A. $4\frac{1}{4}$
    B. $3\frac{1}{2}$
    C. $3\frac{1}{4}$
    D. $2\frac{1}{2}$
    E. $2\frac{1}{4}$

16. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

17. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

18. $\lim\limits_{X \to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

19. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-2\sqrt{2x-1}}{x-1}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

20. $\lim_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{6x-2}-4}$
    A. $\frac{1}{9}$
    B. $\frac{2}{9}$
    C. $\frac{4}{9}$
    D. $\frac{5}{9}$
    E. $\frac{8}{9}$

21. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-x-1}$
    A. -4
    B. -2
    C. 0
    D. 2
    E. 4

22. $\lim_{X \to 2} \frac{x+2}{\sqrt{5x+14}-2}$
    A. 4
    B. 2
    C. 1,2
    D. 0.8
    E. 0,4

23. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+6x}-\sqrt{1-6x}}$
    A. $\frac{1}{6}$
    B. $\frac{5}{6}$
    C. $\frac{1}{5}$
    D. $\frac{2}{5}$
    E. $\frac{3}{5}$

24. Sebatang besi dipanaskan sehingga mengalami pemuaian memanjang. Adapun rumus pertambahan memanjang terhadap waktu dituliskan dengan fungsi f(t)=0,16t^2+0,8t (mm), t dalam menit. Kecepatan perubahan memanjang pada saat t=10 menit adalah…
    A. 2,4 mm/menit
    B. 3,6 mm/menit
    C. 4 mm/menit
    D. 6 mm/menit
    E. 8 mm/menit

25. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak yang ditempuh dalam waktu tertentu dirumuskan dengan fungsi $S(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t$ (dalam meter) dan t dalam detik. Tentukan kelajuan mobil pada saat t=8 detik.
    (Petunjuk: kelajuan adalah perubahan jarak persetiap perubahan waktu atau $v(t) = \frac{\triangle S}{\triangle t}$)
    A. 4 m/det
    B. 6 m/det

C. 8 m/det
D. 10 m/det
E. 12 m/det

KUNCI JAWABAN EVALUASI:

1. D
2. C
3. D
4. C
5. D
6. E
7. A
8. A
9. A
10. E
11. B
12. B
13. E
14. B
15. E
16. D
17. B
18. E
19. A
20. E
21. A
22. D
23. A
24. C
25. B

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. Materi Lengkap Limit Fungsi Aljabar, Dalam : https://edumatik.net/materi-lengkap-limit-fungsi-aljabar/ , diakses 9 September 2020

Anonim, Sifat-sifat limit fungsi Aljabar, Dalam : https://edumatik.net/sifat-sifat-limit-fungsi-aljabar/ , diakses 9 September 2020

Anonim. Soal-pg-pilihan Ganda - Bahas Limit Akar Sekawan, Dalam : https://www.gupak.com/2017/06/soal-pg-pilihan-ganda-bahas-limit-akar-sekawan.html, diakses tanggal 9 September 2020

Muklis, Duparno. 2014. Matematika Mata Pelajaran Wajib Kelas XI Semester 1. Klaten: Intan Pariwara.

Manullang, Sudianto. dkk. 2017. Matematika SMA/MA Kelas XI. Jakarta : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Sukino. 2018. The Best Prestasi Matematika IPA. Bandung: Yrama Widya

Tedy Rizkha Heryansyah. 2017. Cara menghitung bunga majemuk, Dalam : https://blog.ruangguru.com/cara-menghitung-bunga-majemuk, diakses tanggal 8 September 2020